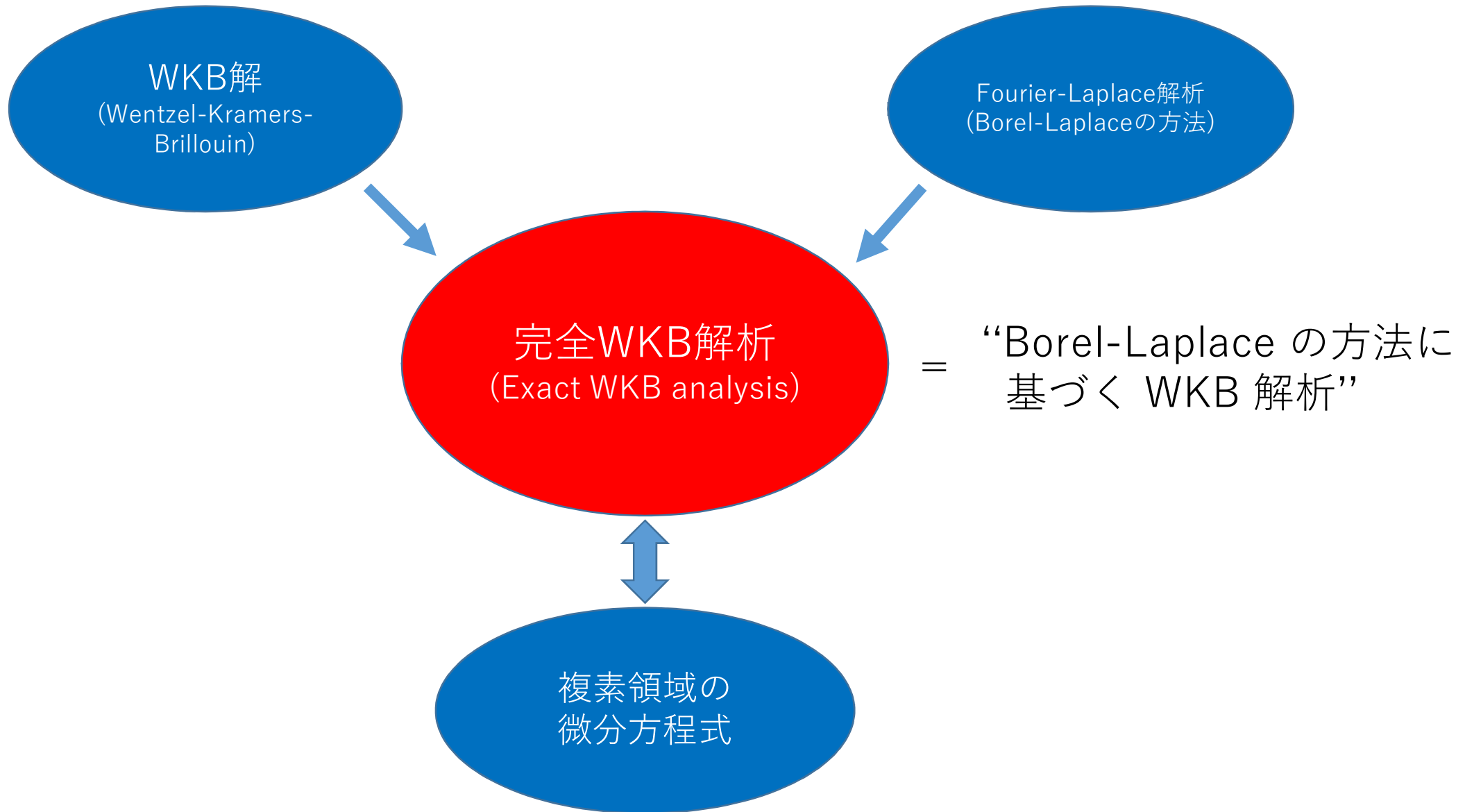


微分方程式の完全 **WKB** 解析について
— 複素解析と漸近解析の一つの接点 —

竹井 義次
(同志社大学 理工学部)

The 19th Oka Symposium
(奈良女子大学岡数学研究所 / **Zoom** ミーティング)
2021年12月18日 (土)

Overview



Brief History

1980年前後

- **Voros** : **Borel** 総和法を用いて **Schrödinger** 方程式の **WKB** 解やスペクトル関数を研究
- **Ecale** : “resurgent function” の理論を創始

1980年代後半 ~ 1990年代

- **Pham, Delabere, . . .** :
 Ecale 理論を用いた完全 **WKB** 解析の基礎付け
- 河合, 青木, 竹井, . . . :
 複素領域の微分方程式への応用,
 高階方程式, **Painlevé** 方程式等への拡張

1990年代 ~ 2000年代前半

- **k -summability, multisummability の理論の進展**
(Ramis, Braaksma, Balser, Costin, ...)

2000年代後半 ~

- **Schäfke, 小池, 神本, Sauzin, ... :**
WKB 解の Borel 総和可能性, resurgence 性
- **Gaiotto-Moore-Neitzke :**
ゲージ理論における壁越え公式の導出

Part 1. Schrödinger 方程式の完全 WKB 解析

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi = 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x) \right) \psi = 0$$

(\hbar : Planck 定数, $\eta = \hbar^{-1} > 0$: large parameter)

$$\psi_{\pm} = \exp\left(\pm \eta \int^x \sqrt{Q(x)} dx\right) \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-(n+1/2)} \psi_{\pm, n}(x)$$

: **WKB (= Wentzel-Kramers-Brillouin) 解**

WKB 解の構成

$$\psi = \exp \int^x S(x) dx \text{ を代入} \implies \frac{dS}{dx} + S^2 = \eta^2 Q(x)$$

$$S(x) = \eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \dots \text{ と展開}$$

$$\implies \begin{cases} S_{-1}(x) = \pm \sqrt{Q(x)} \\ S_{n+1}(x) = -\frac{1}{2S_{-1}} \left(\sum_{\substack{j+k=n \\ j,k \geq 0}} S_j S_k + \frac{dS_n}{dx} \right) \end{cases}$$

$$\langle \text{注} \rangle \quad S_{\pm}(x) = \pm S_{\text{odd}}(x) + S_{\text{even}}(x) \text{ と分解}$$

$$\implies S_{\text{even}}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{\text{odd}}(x)$$

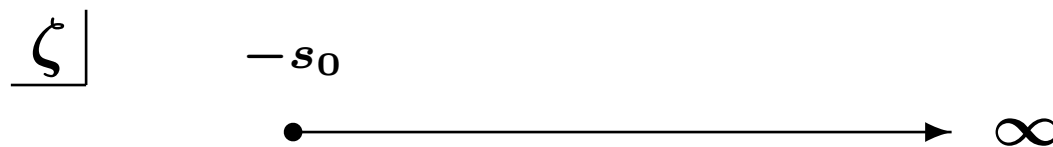
$$\implies \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left(\pm \int^x S_{\text{odd}} dx \right)$$

ほとんどの場合に **WKB** 解は発散. **Borel** 総和法で意味付けする.

Borel-Laplace の方法 $f = e^{s_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-(n+\alpha)}$ に対して

$$f_B(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)} (\zeta + s_0)^{n+\alpha-1} \quad : f \text{ の Borel 変換}$$

$$F(z) = \int_{-s_0}^{\infty} e^{-z\zeta} f_B(\zeta) d\zeta \quad : f \text{ の Borel 和}$$



<注> $\zeta^{\kappa-1} \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} \int_0^{\infty} e^{-z\zeta} \zeta^{\kappa-1} d\zeta = \Gamma(\kappa) z^{-\kappa}$

従って, **Borel 変換**は (形式的) 逆 **Laplace 変換**.

Γ 函数のお蔭で, f は収束しなくても f_B が収束する場合がある.

Example (Airy 方程式)

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 x \right) \psi = 0$$

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left(\pm \int_0^x S_{\text{odd}} dx \right)$$

ここで $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_{\pm, B}(x, y) = 0$ に注意すれば,

$$\psi_{+, B}(x, y) = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{x} s^{-1/2} F \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; s \right)$$

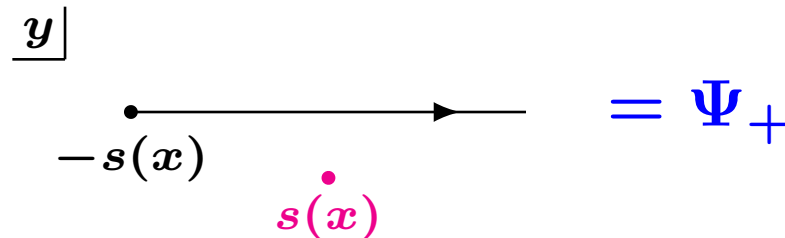
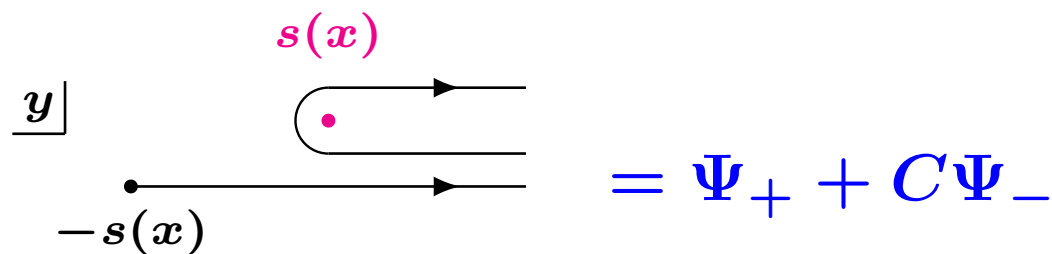
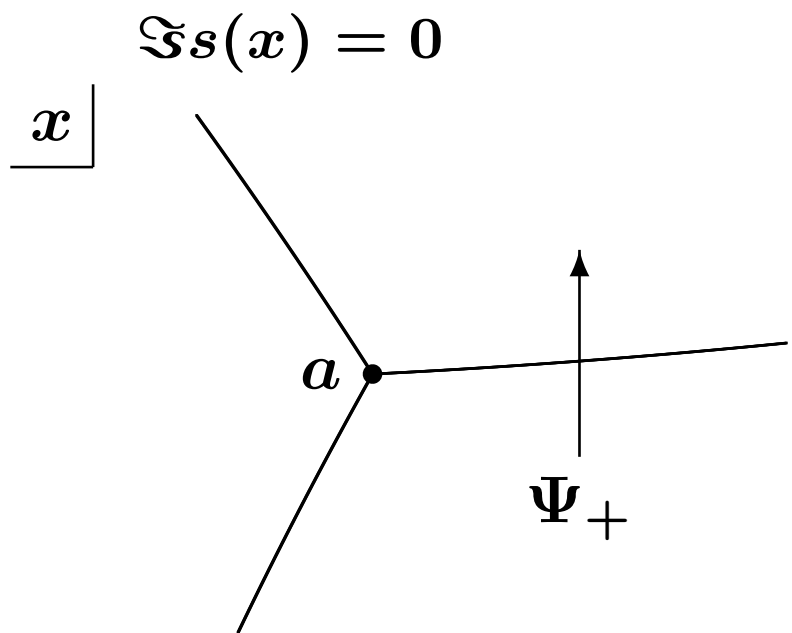
$$\psi_{-, B}(x, y) = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{x} (1-s)^{-1/2} F \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}; 1-s \right)$$

ただし $s = \frac{3}{4} \frac{y}{x^{3/2}} + \frac{1}{2}$, $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ は Gauss の超幾何函数.

鍵を握っているのは **Borel 変換** $\psi_{\pm, B}(x, y)$. 次が成立.

▶ $\psi_{+, B}(x, y)$ は $y = \pm s(x) = \pm \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx$ に特異点を持つ,
ここで a は $Q(x)$ の零点.

▶ **Borel 変換の特異点は Stokes 現象を引き起こす.**



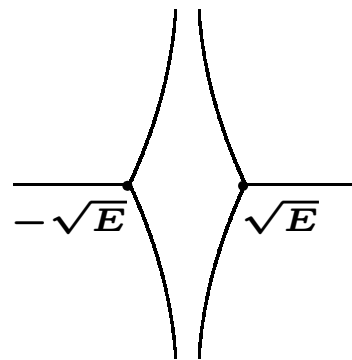
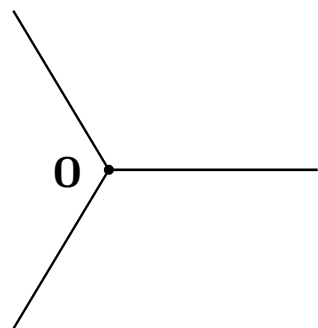
Stokes 幾何

$$\left(\begin{array}{ll} \text{turning point} & \iff Q(x) \text{ の零点} \\ \text{Stokes 曲線} & \iff \operatorname{Im} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx = 0 \end{array} \right.$$

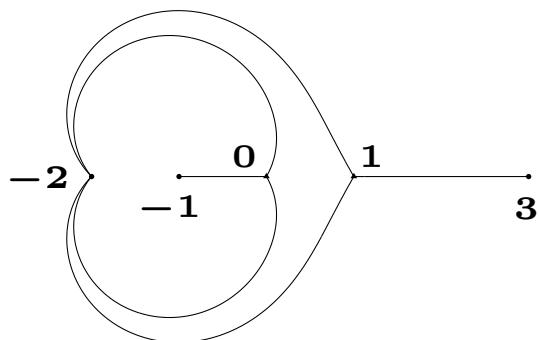
e.g.,

$$Q(x) = x \text{ (Airy)}$$

$$Q(x) = x^2 - E \text{ (Weber)}$$



$$Q(x) = \frac{x(x-1)}{((x+1)(x+2)(x-3))^2} \text{ (Gauss HG)}$$



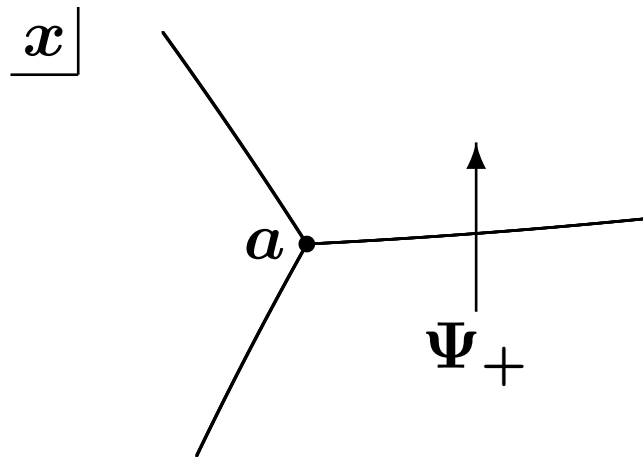
cf. Gaiotto-Moore-Neitzke :
“spectral network”

WKB 解の Borel 和の基本性質

2つの **turning point** を結ぶ **Stokes 曲線** が存在しないと仮定するとき、次が成り立つ。

▶ **WKB 解は Stokes 曲線を除いて Borel 総和可能 (Koike-Schäpfke).**

▶ 各 **Stokes 曲線** 上では、次の **接続公式** で記述される **Stokes 現象** が起こる (**Voros**).


$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_+ \rightsquigarrow \Psi_+ + i\Psi_- \\ \Psi_- \rightsquigarrow \Psi_- \end{array} \right.$$

ただし、 $\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx\right)$ は $x = a$ で正規化された **WKB 解**.

Schrödinger 方程式の大域解析への応用

Stokes 曲線の形状に従って接続公式を繰り返し用いることにより,

Schrödinger 方程式の解の大域挙動, 例えば

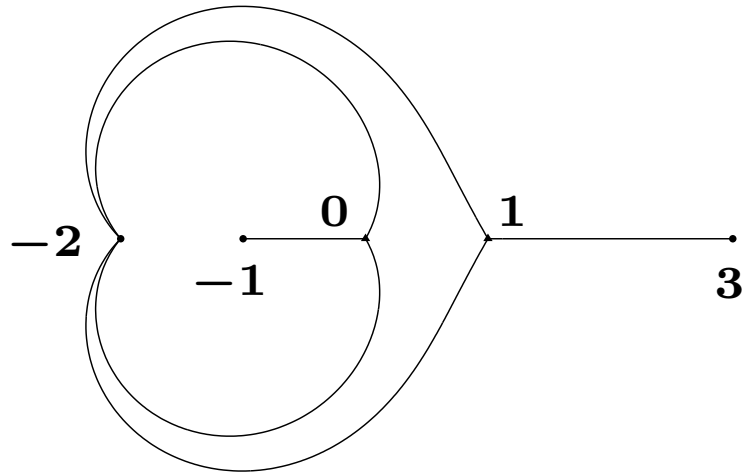
接続行列, モノドロミー群, **Stokes 係数**, 量子化条件, ...

は次で記述される.

$\sqrt{Q(x)}$ の **Riemann** 面上での S_{odd} の周回積分

(Cf. 河合-竹井, 特異摂動の代数解析学, 岩波 (2008))

Example $Q(x) = \frac{x(x-1)}{((x+1)(x+2)(x-3))^2}$



$$(\psi_+, \psi_-) \underset{\text{along } \gamma}{\rightsquigarrow} (\psi_+, \psi_-) A_\gamma$$

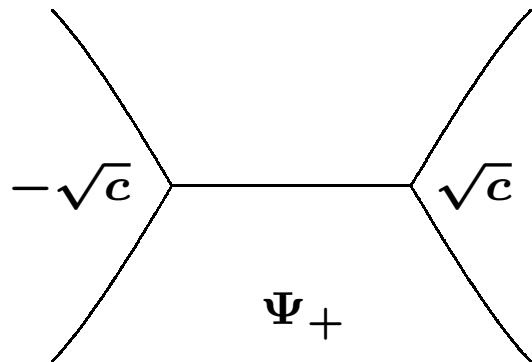
$$A_\gamma = \begin{pmatrix} \nu_{-2}^+ & 0 \\ i \left[\nu_{-2}^+ (1 + C^+) + \nu_{-2}^- (\nu_{-1}^-)^2 (1 + C^-) \right] & \nu_{-2}^- \end{pmatrix}$$

ただし, $\nu_a^\pm = \exp \pm \oint_{\text{around } x=a} S_{\text{odd}} dx$, $C^\pm = \exp \pm \oint_{\text{around the cut}} S_{\text{odd}} dx$.

Several remarks

▶ 2つの **turning point** を結ぶ **Stokes 曲線** が存在するとき, **パラメータに関する Stokes 現象** が起きる.

e.g., $Q(x) = c - x^2/4$ ($c > 0$)



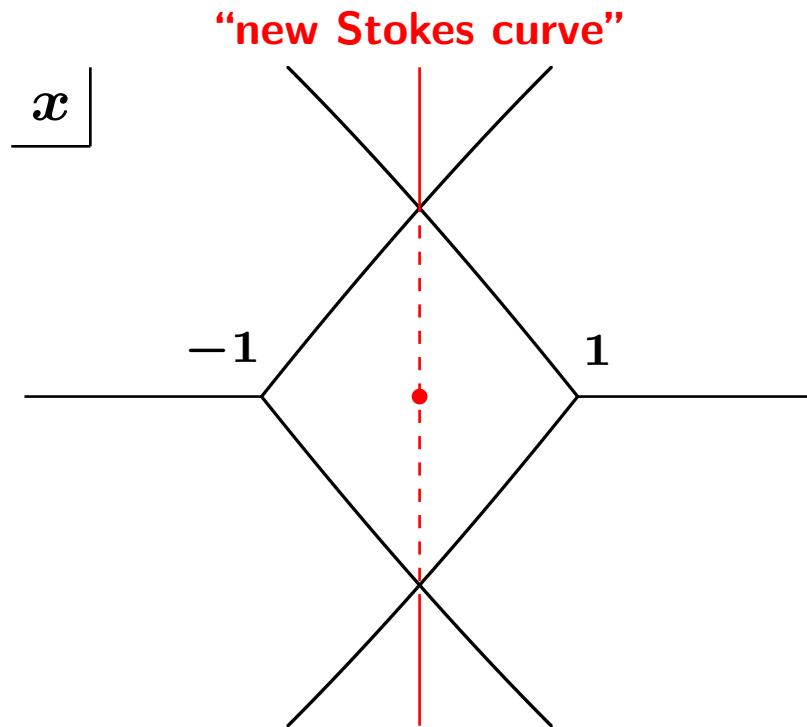
$$\Psi_+ \rightsquigarrow (1 + e^{-2\pi c\eta})^{-1/2} \Psi_+$$

<注> $\psi_{\pm, B}(x, y)$ が無限個の周期的な特異点を持つことと関連.

(cf. Sauzin, 神本, ...: “resurgence 性” の解析)

▶ 高階方程式に対しては, **new Stokes curve** が現れる.

Example (BNR 方程式)
$$\left(\eta^{-3} \frac{d^3}{dx^3} + 3\eta^{-1} \frac{d}{dx} + 2ix \right) \psi = 0$$



new Stokes curve は **virtual turning point** を始点とする Stokes 曲線と考えられる.

(cf. 本多-河合-竹井, *Virtual Turning Points*, Springer (2015))

高階方程式の場合に **WKB** 解の **Borel** 変換の特異点構造を調べることは, 今後の重要な課題の一つ.

Part 2. Painlevé 方程式の完全 WKB 解析

$$(PI) \quad \eta^{-2} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = 6\lambda^2 + t$$

$$(PII) \quad \eta^{-2} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = 2\lambda^3 + t\lambda + c$$

$$(PJ) \quad \eta^{-2} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = F_J(\lambda, t) + \eta^{-2} G_J(\lambda, \lambda', t) \quad (J = I, \dots, VI)$$

Painlevé 性 (i.e., 解は有理型), **Weyl 群対称性**, ...

さらに, **線型方程式のモノドロミー保存変形を記述**

$$\left(\eta^{-2} \frac{d^2}{dx^2} - Q(x, t, \lambda, \mu, \eta) \right) \psi = 0 \quad (SLJ)$$

(PJ) の形式解

1°) 形式巾級数解 (or “0-parameter 解”)

$$\lambda_J^{(0)}(t, \eta) = \lambda_0(t) + \eta^{-2} \lambda_2(t) + \dots, \quad F_J(\lambda_0(t), t) = 0$$

2°) transseries 解

$$\lambda_J(t, \eta; \alpha) = \lambda^{(0)} + \eta^{-1/2} \alpha \lambda^{(1)} + (\eta^{-1/2} \alpha)^2 \lambda^{(2)} + \dots$$

ただし $(\Delta PJ) \frac{d^2}{dt^2} \lambda^{(1)} = \eta^2 \frac{\partial F_J}{\partial \lambda}(\lambda_0, t) \lambda^{(1)} + (\text{lower order})$

3°) インスタントン解

$$\lambda_J(t, \eta; \alpha, \beta) = \lambda_0(t) + \eta^{-1/2} \mu_J(t) \left[\alpha e^{\eta \Phi_J(t)} + \beta e^{-\eta \Phi_J(t)} \right] + \dots$$

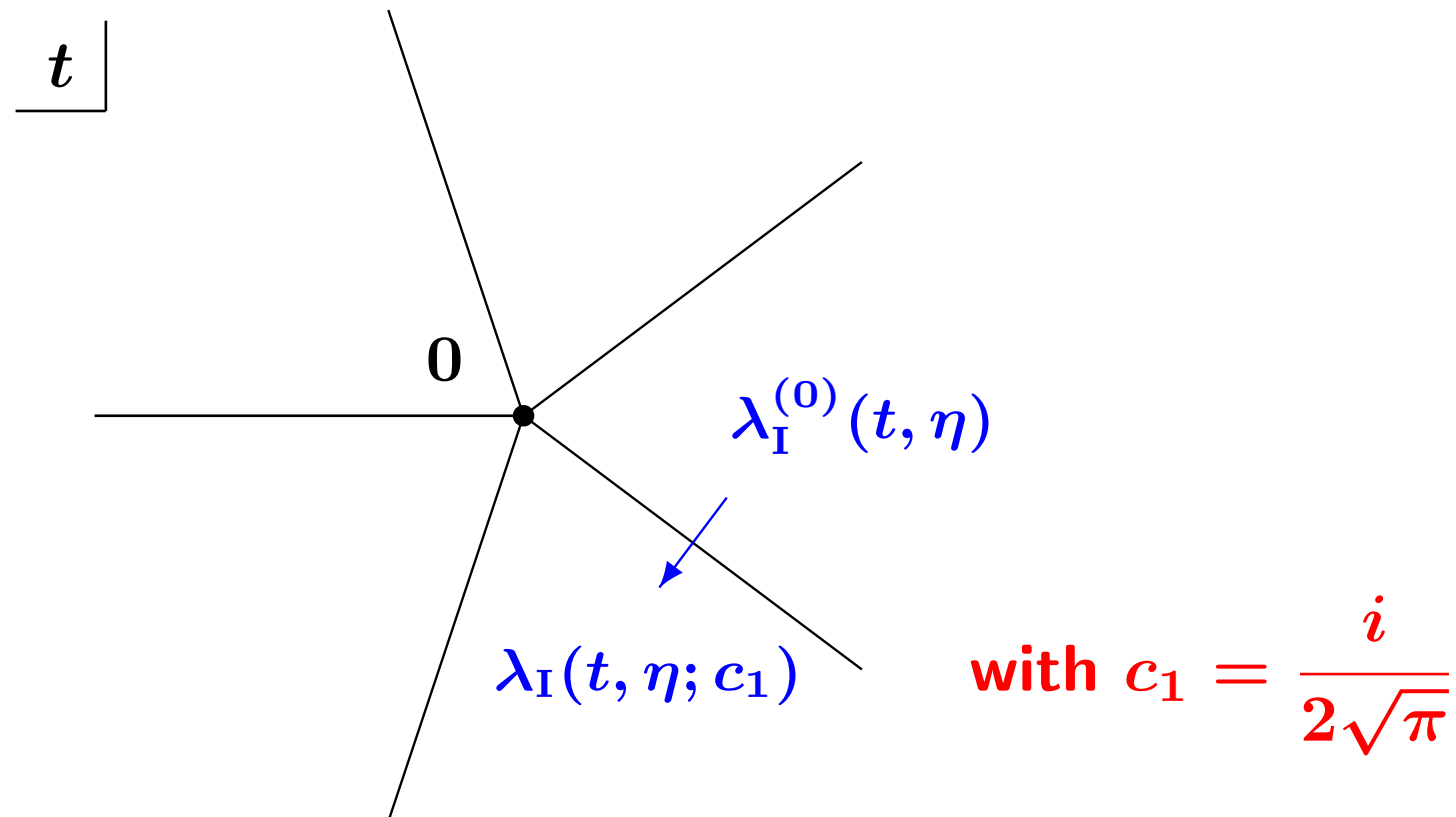
ここで $\Phi_J(t) = \int^t \sqrt{\frac{\partial F_J}{\partial \lambda}(\lambda_0(t), t)} dt + \eta^{-1} \alpha \beta \log(\eta^2 \theta_J(t))$

例えば, (PI) の解 $\lambda_I^{(0)}(t, \eta)$ に **Borel** 総和法を適用すれば,

▶ $\lambda_{I,B}^{(0)}(t, y)$ は $y = m \int_0^t \sqrt{12\lambda_0} dt$ ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) に特異点を持つ

(cf. Delabaere, *Springer LNM*, vol. 2155 (2016))

▶ $\Im \int_0^t \sqrt{12\lambda_0} dt = 0$ 上で $\lambda_I^{(0)}(t, \eta)$ に **Stokes** 現象が起きる.



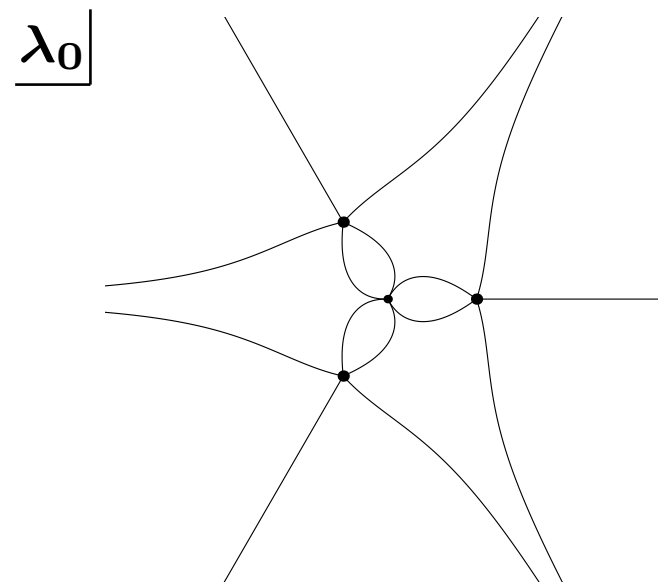
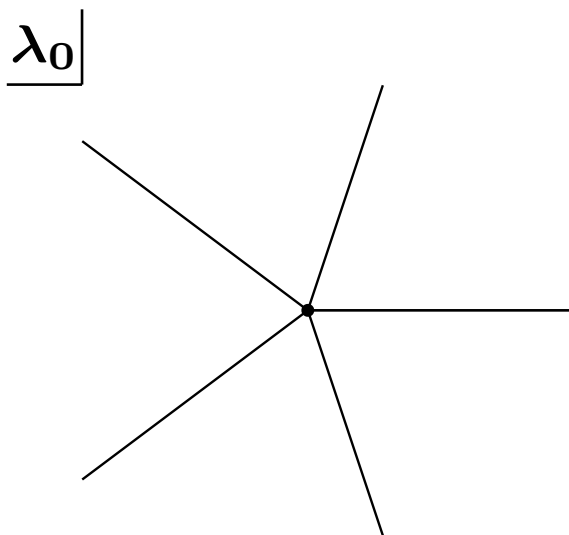
Stokes 幾何

(PJ) の turning point & Stokes 曲線

\iff (ΔPJ) の turning point & Stokes 曲線

e.g., (PI) $\frac{\partial F_I}{\partial \lambda} = 12\lambda_0 + \dots$
with $6\lambda_0^2 + t = 0$

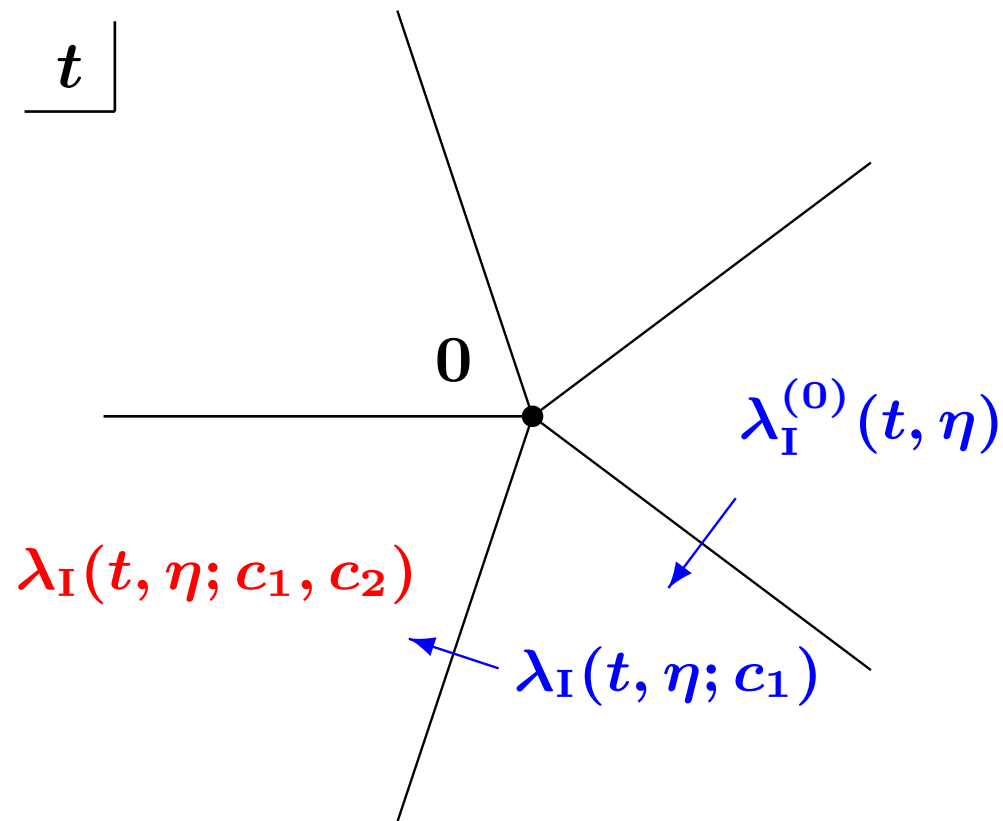
(PII) $\frac{\partial F_{II}}{\partial \lambda} = (6\lambda_0^2 + t) + \dots$
with $2\lambda_0^3 + t\lambda_0 + c = 0$



(ただし $c > 0$)

本質的な困難

2本目の Stokes 曲線を越えて $\lambda_I^{(0)}(t, \eta)$ の更なる解析接続を考えると、自然にインスタントン解が現れる。



<注> $\Phi_J(t)$ は (SLJ) のトンネル効果 (“インスタントン”) と関連.

ところが、**Painlevé** 方程式の非線型性により、インスタントン解には無限個の $\exp(m\eta\Phi_J(t))$ ($m \in \mathbb{Z}$) が現れる.

⇒ 指数函数的に大きな項と小さな項を同時に含むため、インスタントン解に解析的な意味を賦与することは困難.

(cf. **Garoufalidis-Its-Kapaev-Marino**, *Int. Math. Res. Not.*, **IMRN (2012)**)

さらに、楕円函数を用いた **Painlevé** 函数の漸近挙動に関する過去の研究 (cf. **Its, Kapaev, Kitaev ...**) との関係が不明.

Question

インスタントン解をどのように意味づけるか？

2-1. Riccati 方程式の場合

$$\eta^{-1} \frac{dT}{dx} = Q(x) - T^2 \quad \left(\underset{\psi = e^{\eta \int T dx}}{\iff} \left(\eta^{-2} \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi = 0 \right) \quad (R)$$

- $T^{(0)} = T_0 + \eta^{-1} T_1 + \dots$: 形式巾級数解

$$\left(T_0 = \pm \sqrt{Q(x)} \right)$$

- $T(x, \eta; \alpha) = T^{(0)} + \eta^{-1/2} \alpha \exp\left(-2\eta \int T_0 dx\right) T^{(1)} + \dots$

: インスタントン解 (or transseries 解)

▶ $T_0 = \pm \sqrt{Q(x)}$ により, どちらか一方のインスタントン解は指数函数的に大きな項を含む \longrightarrow \exists 発散の困難

インスタントン解の構成と意味づけ — 線型化 (linearization)

$T = T^{(0)} + \eta^{-1/2}w$: $T = T^{(0)}$ のまわりでの局所化.

$$(R) \iff \eta^{-1} \frac{dw}{dx} = -2T^{(0)}w - \eta^{-1/2}w^2 \quad (1)$$

Theorem 1 (“modified linearization”)

$$\exists w = w(W, \eta^{-1/2}) = \sum_j \eta^{-j/2} w_{j/2}(W)$$

such that

$$(1) \iff \eta^{-1} \frac{dW}{dx} = -2T_{\text{odd}}W \quad (2)$$

► (2) の解 $W = \alpha \exp(-2\eta \int^x T_{\text{odd}} dx)$ を $w = w(W, \eta^{-1/2})$ に代入すれば, Riccati 方程式のインスタントン解が得られる.

(ただし, W が指数函数的に大きいときは解析的には意味がない.)

そこで、次の図式を考える：

$$\begin{array}{ccc}
 \eta^{-1} \frac{dT}{dx} = Q(x) - T^2 & \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ T=T(W) \end{array} & \eta^{-1} \frac{dW}{dx} = -2T_{\text{odd}}W \\
 & & \Downarrow \frac{d\tilde{x}}{dx} = T_{\text{odd}} \\
 \eta^{-1} \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{x}} = 1 - \tilde{T}^2 & \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \tilde{T}=\tilde{T}(\tilde{W}) \end{array} & \eta^{-1} \frac{d\tilde{W}}{d\tilde{x}} = -2\tilde{W}
 \end{array}$$

$$\implies T = (T \circ \tilde{T}^{-1})(\tilde{T}_0(\tilde{x})) \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}(t,\eta)},$$

ここで $\tilde{T}_0(\tilde{x})$ は $\eta^{-1}\tilde{T}' = 1 - \tilde{T}^2$ の解。特に、次のように選ぶ。

$$\tilde{T}_0(\tilde{x}) = \frac{e^{2\eta\tilde{x}} - c}{e^{2\eta\tilde{x}} + c} \quad \text{or} \quad \frac{c - e^{-2\eta\tilde{x}}}{c + e^{-2\eta\tilde{x}}}$$

さらに, Riccati 方程式の場合, 次が成り立つ.

Theorem 2 Riccati 方程式を (2) にうつす **modified linearization** の変換級数 $T = T(W, \eta) = T_+^{(0)} + \eta^{-1/2}w(W, \eta)$ は, 次式で与えられる.

$$T(W, \eta) = T_{\text{odd}} \frac{1 + \eta^{-1/2}W/2}{1 - \eta^{-1/2}W/2} + T_{\text{even}}$$

Corollary

$$T = T \circ \tilde{T}^{-1} = T_{\text{odd}} \cdot \tilde{T}_0(\tilde{x}) \Big|_{\tilde{x} = \int^x T_{\text{odd}} dx} + T_{\text{even}} \quad (3)$$

Riccati 方程式 (R) の場合の結論

- ▶ (3) の右辺には指数函数的に大きな項の無限級数は現れない。従って、変換級数の **Borel** 総和可能性が示されれば、(3) によって (R) のインスタント解に解析的な意味を与えることが可能となる。
- ▶ (3) の右辺は、(R) の形式巾級数解である T_{odd} と T_{even} のみによって表されている。従って、**Koike-Schäfke** の結果により、**Stokes** 曲線を除いて変換級数は **Borel** 総和可能となる。
- ▶ (3) はまた、 T の特異点に関する情報が $\tilde{T}_0(\tilde{x})$ の特異点の情報から得られることも意味している。

2-2. Painlevé 方程式のインスタントン解

以下, (PI) $\eta^{-2}\lambda'' = 6\lambda^2 + t$, あるいはそれと同値な次式を考える.

$$\begin{cases} \eta^{-1}\lambda' = \mu = \frac{\partial H}{\partial \mu} \\ \eta^{-1}\mu' = 6\lambda^2 + t = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \end{cases} \quad (H = \frac{\mu^2}{2} - (2\lambda^3 + t\lambda)) \quad (HI)$$

$$\lambda = \lambda_I^{(0)} + \eta^{-1/2}u, \quad \mu = \mu_I^{(0)} + \eta^{-1/2}v$$

: 形式巾級数解 $(\lambda_I^{(0)}, \mu_I^{(0)})$ のまわりでの局所化

$$(HI) \iff \begin{cases} \eta^{-1}u' = \frac{\partial K}{\partial v} \\ \eta^{-1}v' = -\frac{\partial K}{\partial u} \end{cases} \quad (\exists K = K(u, v, \eta^{-1}))$$

Theorem 3 (Birkhoff 標準形) 次の形の変換級数

$$\begin{cases} u = U(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n/2} U_{n+1}(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ v = V(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n/2} V_{n+1}(\tilde{u}, \tilde{v}), \end{cases}$$

(ただし U_n, V_n は (\tilde{u}, \tilde{v}) の n 次多項式) が存在して, (HI) は次の **Birkhoff 標準形**に変換される.

$$\begin{cases} \eta^{-1} \tilde{u}' = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{v}} \\ \eta^{-1} \tilde{v}' = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{u}}, \end{cases}$$

ここで

$$\tilde{K} = \tilde{K}(\theta) \Big|_{\theta=\tilde{u}\tilde{v}} = 2\sqrt{3}\tilde{u}\tilde{v} + \eta^{-1}c_2(\tilde{u}\tilde{v})^2 + \dots$$

インスタントン解の構成

$\tilde{K}^\dagger = \frac{d}{d\theta} \tilde{K}(\theta) \Big|_{\theta=\tilde{u}\tilde{v}}$ とおくと, **Birkhoff** 標準形は次のように解ける.

$$\eta^{-1} \tilde{u}' = \tilde{K}^\dagger(\tilde{u}\tilde{v}) \tilde{u}, \quad \eta^{-1} \tilde{v}' = -\tilde{K}^\dagger(\tilde{u}\tilde{v}) \tilde{v}$$

$$\implies (\tilde{u}\tilde{v})' = \tilde{u}'\tilde{v} + \tilde{u}\tilde{v}' = 0, \quad \text{i.e., } \tilde{u}\tilde{v} = C$$

$$\implies \tilde{u} = \alpha \exp(\eta \tilde{K}^\dagger(C)t), \quad \tilde{v} = \beta \exp(-\eta \tilde{K}^\dagger(C)t),$$

ここで α, β は積分定数 (自由パラメータ) であり, さらに $C = \alpha\beta$ が成り立つ. この **Birkhoff** 標準形の解を変換級数に代入すれば, (PI) (あるいは (HI)) のインスタントン解が得られる.

<注> **Theorem 3** は次の方程式に対しても同様に成立.

$$\eta^{-2} \lambda'' = 6(\lambda^2 - 1) \quad (E)$$

そこで、再び次の図式を考える：

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{d\lambda}{dt} = \mu \\ \eta^{-1} \frac{d\mu}{dt} = 6\lambda^2 + t \end{array} \right. & \begin{array}{c} \iff \\ (\lambda, \mu) = \Phi(u, v) \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{du}{dt} = K^\dagger(\alpha\beta, t)u \\ \eta^{-1} \frac{dv}{dt} = -K^\dagger(\alpha\beta, t)v \end{array} \right. \\
 & & \Downarrow \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{K^\dagger(\alpha\beta, t)}{\tilde{K}^\dagger(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{d\tilde{\lambda}}{d\tilde{t}} = \tilde{\mu} \\ \eta^{-1} \frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{t}} = 6(\tilde{\lambda}^2 - 1) \end{array} \right. & \begin{array}{c} \iff \\ (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = \tilde{K}^\dagger(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{u} \\ \eta^{-1} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\tilde{K}^\dagger(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{v} \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\implies (\lambda, \mu) = (\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1})(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \Big|_{\tilde{t}=\tilde{t}(t, \eta)}.$$

従って、(PI) のインスタントン解は (E) のインスタントン解によって表される。

さらに、 (E) の解として **Weierstrass** の \mathcal{P} 関数を用いれば、次が得られる。

インスタントン解の解析的意味づけ

$$(\lambda, \mu) = (\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1})(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \Big|_{\tilde{t}=\tilde{t}(t,\eta)},$$

ただし、 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\eta t; 12, g_3)$ は **Weierstrass** の \mathcal{P} 関数。

Riccati 方程式の場合と同様に、上式の右辺に指数函数的に大きな項は現れないので、**Birkhoff** 標準形への変換級数の **Borel** 総和可能性が確かめられれば、上式によって **Painlevé** 方程式のインスタントン解に解析的な意味が与えられると期待される。

Several remarks

▶ 20世紀初頭に **Boutroux** は，方程式の特異点の近傍での **Painlevé** 関数の漸近挙動が楕円関数によって近似的に記述されることを示した．
上式は，この **Boutroux** 近似を (η^{-1} に関して任意次数で成り立つ) **exact** な式に拡張したものと見なせる．

▶ (\tilde{u}, \tilde{v}) ($= \eta^{1/2}(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^{(0)}, \tilde{\mu} - \tilde{\mu}^{(0)})$) に関する $\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ の線型部分 (1次式の部分) は次式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} \frac{12^{1/4}}{(\eta^{-1} S_{\text{odd}})^{1/2}} & 0 \\ \frac{12^{1/4}(\eta^{-1} S_{\text{even}})}{(\eta^{-1} S_{\text{odd}})^{1/2}} & \frac{(\eta^{-1} S_{\text{odd}})^{1/2}}{12^{1/4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix},$$

ただし， S_{odd} , S_{even} は (ΔPJ) の **WKB** 解の **odd part** と **even part** である．この式は， (ΔPJ) の **Stokes 曲線** が (PJ) の **インスタントン解の意味づけにも関係すること** を意味する．

まとめ & 今後の課題

- ▶ 完全 **WKB** 解析は **Schrödinger** 方程式の解の大域解析に有効.
- ▶ インスタントン解の意味づけができれば, **Painlevé** 方程式の大域解析にも有効.
- ▶ インスタントン解の意味づけは, **Birkhoff** 標準形を用いた楕円関数への変換により可能と期待できる. 変換級数の **Borel** 総和可能性の証明が今後の課題.
- ▶ このインスタントン解の意味づけと,
 - **Painlevé** 方程式の初期値空間,
 - モノドロミー保存変形の理論,
 - **Painlevé** 方程式の“周期”,等との関係は？
- ▶ 高階 **Painlevé** 方程式への拡張.

Appendix. 異なるインスタントン解の関係

(PI) $\eta^{-2}\lambda'' = 6\lambda^2 + t$ に対して,

$$\lambda_{\pm}(t, \eta; \alpha, \beta) = \pm \sqrt{-\frac{t}{6} + \eta^{-\frac{1}{2}} \mu_{\pm}(t)} \left[\alpha e^{\eta \Phi_{\pm}(t)} + \beta e^{-\eta \Phi_{\pm}(t)} \right] + \dots$$

: $\lambda_0 = \pm \sqrt{-t/6}$ を初項とするインスタントン解.

同様に, (E) $\eta^{-2}\lambda'' = 6(\lambda^2 - 1)$ に対しても,

$$\lambda_{\pm}(t, \eta; \alpha, \beta) = \pm 1 + \eta^{-\frac{1}{2}} \left[\alpha e^{\eta \Phi_{\pm}(t)} + \beta e^{-\eta \Phi_{\pm}(t)} \right] + \dots$$

: $\lambda_0 = \pm 1$ を初項とするインスタントン解.

こうした同じ方程式の2つのインスタントン解の関係は?

(E) の場合

$$(E) \Rightarrow (\eta^{-1}\lambda')^2 = 4\lambda^3 - 12\lambda - g_3$$

$$\Rightarrow \text{一般解は } \lambda(t) = \mathcal{P}(s + \hat{s}; 12, g_3) \quad (s = \eta t)$$

$$\text{特に, } \lambda_0 = 1 \text{ が } (E) \text{ の解} \Rightarrow g_3 = -8$$

$$\Rightarrow (\eta^{-1}\lambda')^2 = 4(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

$$\lambda_0 = -1 \text{ が } (E) \text{ の解} \Rightarrow g_3 = 8$$

$$\Rightarrow (\eta^{-1}\lambda')^2 = 4(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

一方,

青木の observation (数理研講究録, vol. 1014 (1997))

(E) のインスタント解は楕円函数の **Fourier** 級数展開に対応.

従って, 楕円函数の周期 ϖ を選ぶごとにインスタント解が定まる.

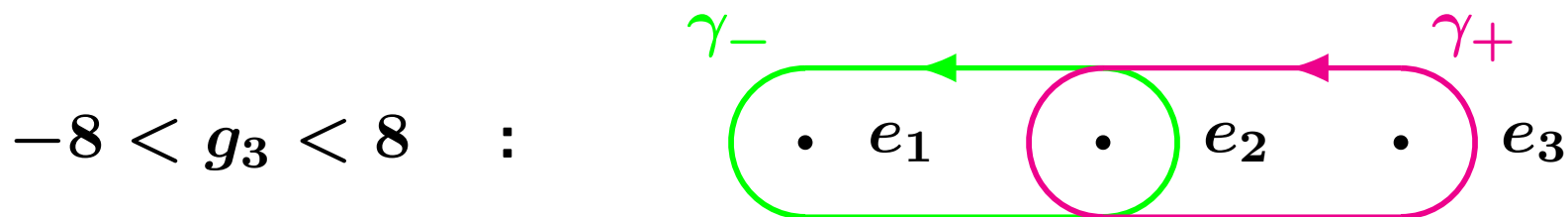
\mathcal{P} 関数の周期

$\mathcal{P}(s)$ の周期は、次の楕円積分で与えられる：

$$\varpi(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - 12\lambda - g_3}} = \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)}}$$

特に $-8 \leq g_3 \leq 8$ のとき、 $\{e_j\}$ の位置関係は次の通り：

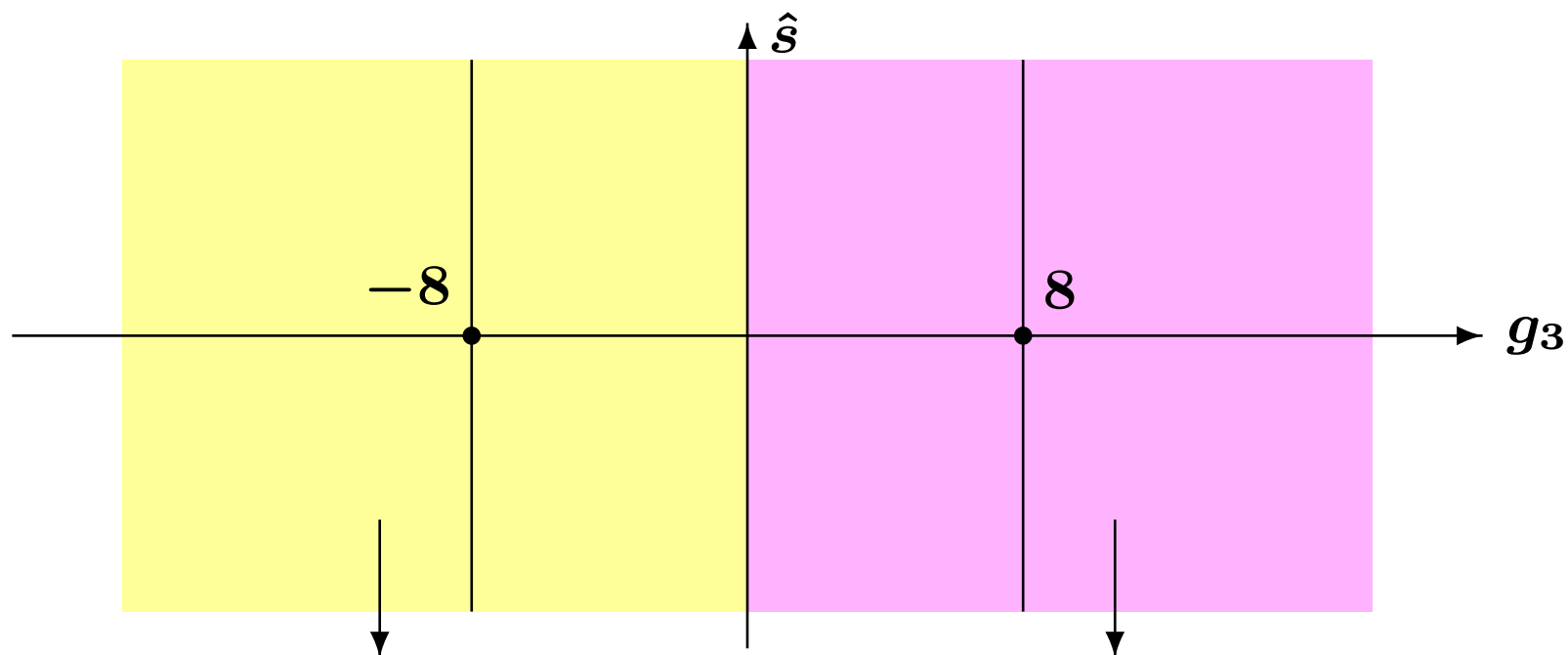
$$g_3 = -8 \quad : \quad -2 \cdot \quad \circ 1$$



$$g_3 = 8 \quad : \quad -1 \circ \quad \bullet 2$$

閉曲線 γ_{\pm} を上のように定めれば、 $g_3 = \mp 8$ で生き残るのは γ_{\pm} のみ。

(E) のインスタントン解 $\lambda_{\pm}(t, \eta; \alpha_{\pm}, \beta_{\pm})$ の間の相互関係



$$\lambda_+(t, \eta; \alpha_+, \beta_+)$$

\simeq $\varpi(\gamma_+)$ に関する \mathcal{P}
の **Fourier** 級数展開

\Rightarrow (α_+, β_+) と (\hat{s}, g_3)
の関係式

$$\lambda_-(t, \eta; \alpha_-, \beta_-)$$

\simeq $\varpi(\gamma_-)$ に関する \mathcal{P}
の **Fourier** 級数展開

\Rightarrow (α_-, β_-) と (\hat{s}, g_3)
の関係式

こうして得られる2つの関係式から (\hat{s}, g_3) を消去すれば, (α_+, β_+) と (α_-, β_-) の間の関係式が得られる.